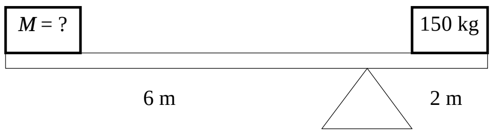
BARYCENTRE DE 2 POINTS PONDÉRÉS (ET PLUS ...)

Motivation : sachant que la balance suivante est en équilibre, quel est le poids M ?



1. Barycentre de deux points pondérés : définition

Définition 1

Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

On appelle barycentre de deux points pondérés (A, α) et (B, β) le point G défini par :

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

En toute rigueur, il faudrait au préalable prouver l'existence et l'unicité d'un tel point G. Voir le cours de terminale pour cette preuve.

Physiquement, G est le point d'équilibre de la balance $[AB]$ munie de masses α et β. Mathématiquement, la notion est étendue à des coefficients qui peuvent être négatifs.

Exemple 1 :

Soit $[AB]$ un segment. Construire le barycentre G de $(A, 3)$ et $(B, 2)$.

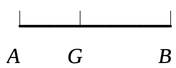
Le point G est donc tel que : $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Malheureusement, cette relation ne nous donne pas directement d'informations sur la position de G. Transformons avec la relation de Chasles :

$$3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

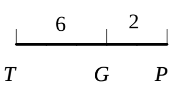
D'où : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Pour placer G, il suffit de diviser le segment $[AB]$ en 5 parties de longueurs égales :



Solution du problème de motivation :

Adoptons les notations suivantes :



On a : $M\overrightarrow{GT} + 150\overrightarrow{GP} = \vec{0}$

Or $\overrightarrow{GT} = -3\overrightarrow{GP}$ d'où : $(-3M + 150)\overrightarrow{GP} = \vec{0}$

Comme $\overrightarrow{GP} \neq \vec{0}$: $-3M + 150 = 0$

D'où : $M = 50$ kg

On utilise ici la propriété suivante :

$\alpha \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$

Exemple 2 :

Soit G le point d'un segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

G est-il le barycentre de A et B munis de certains coefficients ?

On a : $$4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$$

$$3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

Donc : G est le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 1)$

Cas particuliers :

- Si $\alpha = 0$ alors $\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ et comme $\beta \neq 0$, on a $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ d'où : $G = B$
- Si $\beta = 0$ alors $\alpha\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$ et comme $\alpha \neq 0$, on a $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$ d'où : $G = A$
- Si $\alpha = \beta$ alors $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, ce qui signifie que G est le milieu de $[AB]$. (On dira dans ce cas que G est l'isobarycentre de A et B car les coefficients sont égaux)

2. Autres caractérisations du barycentre

Théorème 1

Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et G un point du plan. Dans ces conditions, on a :

G barycentre de (A, α) et (B, β) $\Leftrightarrow$ Pour tout point M du plan, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$

Démonstration :

- Si G est le barycentre de (A, α) et (B, β) alors on a d'après la relation de Chasles :

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{MB} + \beta\overrightarrow{BG}$$

  Et puisque, par hypothèse $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0}$, il vient :

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$$

- Réciproquement, supposons que pour tout point M du plan :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

  Alors en particulier pour $M = G$, on a : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

  Et comme $\alpha + \beta \neq 0$, ceci signifie bien que G est le barycentre de (A, α) et (B, β).

Théorème 2

Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et G un point du plan. Dans ces conditions, on a :

G est le barycentre de (A, α) et (B, β) équivaut à $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Cette relation permet aisément de construire le point G. (Et donc prouve, ***a posteriori***, son existence)

Démonstration :

- Si G est le barycentre (A, α) et (B, β) alors on utilise le théorème 1 avec $M = A$, ce qui donne :

$$\beta \overrightarrow{AB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{AG}$$

Puis, on divise par $\alpha + \beta$ qui est non nul : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AB}$

- Réciproquement, si on a la relation $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AB}$ alors on peut écrire :

$$\beta \overrightarrow{AB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{AG}$$

$$\beta \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{GB} = \alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{AG}$$

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Et comme $\alpha + \beta \neq 0$, ceci signifie bien que G est le barycentre de (A, α) et (B, β).

<u>Remarque</u> : on obtient un théorème analogue en faisant $M = B$.

<u>Exemple</u> : avec le barycentre G de $(A, 3)$ et $(B, 2)$ on retrouve bien :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB}$$

3. Propriétés du barycentre

<u>Théorème 3</u> (homogénéité)

Le barycentre de deux points reste <u>inchangé</u> lorsqu'on remplace les deux coefficients par des coefficients proportionnels (non nuls).

<u>Démonstration</u> :

Soit k un réel non nul ; la relation $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$) est bien équivalente à la relation $k\alpha \overrightarrow{GA} + k\beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (puisque $\alpha + \beta \neq 0$ équivaut ici à $k\alpha + k\beta \neq 0$) qui signifie bien que G est le barycentre de $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$.

<u>Exemple</u> : construire le barycentre de $(A, 350)$ et $(B, 140)$ revient à étudier $(A, 5)$ et $(B, 2)$.

<u>Théorème 4</u>

Soient α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

Le barycentre G de (A, α) et (B, β) est situé sur la droite (AB).

<u>Démonstration</u> :

On utilise le théorème 2 pour constater que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les points A, B et G sont alignés.

Et plus précisément :

- Si α et β sont de même signe, alors $G \in [AB]$
- Si α et β sont de signes opposés, alors $G \notin [AB]$.

<u>Démonstration</u> :

Supposons $\alpha \neq 0$. Les relations suivantes sont alors équivalentes :

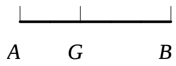
Si $\alpha = 0$ alors $G = B$, donc $G \in [AB]$.

G est le barycentre de (A, α) et (B, β)

G est le barycentre de $(A, 1)$ et $\left(B, \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

$$\overrightarrow{AG} + \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{GB}$$



- Si α et β sont du même signe, alors $\dfrac{\beta}{\alpha} > 0$, donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de même sens : $G \in [AB]$.

- Si α et β sont de signes opposés, alors $\dfrac{\beta}{\alpha} < 0$, donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont de sens opposés : $G \notin [AB]$.

<u>Théorème 5</u>

Le barycentre de deux points A et B affectés du même coefficient non nul est le milieu de $[AB]$. On l'appelle l'<u>isobarycentre</u> des points A et B ou encore centre de gravité des points A et B.

<u>Démonstration</u> : $\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

<u>Devinette</u> : quel est le centre de gravité ?(1)

4. Coordonnées du barycentre dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\,)$

En utilisant le théorème 1 avec $M = O$, on a : $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{OG}$.

Notons (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées respectives de A et B dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}\,)$, on a donc :

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$$

donc :

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{OG} = (\alpha x_A + \beta x_B)\vec{i} + (\alpha y_A + \beta y_B)\vec{j}$$

Ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

<u>Théorème 6</u>

Les coordonnées du barycentre G de (A, α) et (B, β) sont :

$$G\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{pmatrix}$$

(Moyennes pondérées des coordonnées de A et B)

<u>Exemple</u> : $A(1\ ;\ 3)$ et $B(4\ ;\ 1)$. Calculer les coordonnées de G, barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

D'après le théorème 6, on trouve : $G\left(2\ ;\ \dfrac{7}{3}\right)$

(1) Réponse : la lettre "v"...

5. Extensions à un système pondéré de trois points (et plus)

Définition 2

On appelle barycentre de trois points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ) le point G défini par :

$$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad (\text{lorsque } \alpha + \beta + \gamma \neq 0)$$

Théorème 7

Soient α, β et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et G un point du plan. Dans ces conditions, on a :

G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) équivaut à :

pour tout point M du plan : $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MG}$

Démonstration :

On a les équivalences suivantes :

G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ)

$$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\alpha\,\overrightarrow{GM} + \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{GM} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{GM} + \gamma\,\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MG}$$

Théorème 8

Soient α, β et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et G un point du plan. Dans ces conditions, on a :

G est le barycentre de (A, α), (B, β) et (C,γ) équivaut à :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{AC}$$

Démonstration : On utilise le théorème 7 avec $M = A$.

Remarque : si un coefficient est nul, $\gamma = 0$ par exemple, alors G est le barycentre de (A, α) et (B, β).

On a encore la propriété d'homogénéité, et les coordonnées de G se calculent à l'aide des formules suivantes :

$$G\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{pmatrix}$$

(Moyennes pondérées des coordonnées de A, B et C)

Théorème 9

L'isobarycentre des sommets d'un triangle *ABC* est son centre de gravité *G*.

Démonstration : $\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} + \alpha\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ avec $\alpha \neq 0$ équivaut à $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ...

Remarque : on verra plus loin que l'isobarycentre des sommets d'un quadrilatère est, en général, différent de son centre de gravité !

Exercice : *ABC* est un triangle. Construire le barycentre *G* de (*A*, 2), (*B*, 1) et (*C*, 1).

Première méthode : on a, par la définition 2 :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \ (\ast)$$

L'idée est d'introduire le point *I* milieu de [*BC*]. Alors, d'après le théorème 1 appliqué pour $M = G$, on a :

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$$

La relation ($\ast$) s'écrit alors tout simplement : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$

Conclusion : *G* est le milieu de [*AI*].

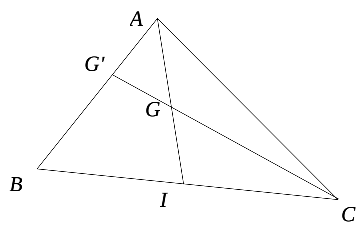
Deuxième méthode : on a, par la définition 2 :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \ (\ast)$$

Introduisons le barycentre *G'* de (*A*, 2) et (*B*, 1). Alors, d'après le théorème 1 appliqué pour $M = G$, on a :

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GG'}$$

La relation ($\ast$) s'écrit alors $3\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Donc le point *G* est le barycentre de (*G'*, 3) et (*C*, 1)



6. Centre d'inertie (d'une plaque homogène)

Soit P une plaque, d'épaisseur négligeable. Le centre d'inertie I de la plaque est l'isobarycentre de tous les points de la plaque. (C'est donc un barycentre d'une infinité de points !). C'est une notion mathématiquement difficile à définir. Cependant, il est souvent facile de construire le centre d'inertie d'une plaque grâce aux propriétés suivantes (admises à notre niveau) :

<u>Cas simples</u>

- Le centre d'inertie d'une tige est le milieu de cette tige.
- Le centre d'inertie d'un triangle est l'isobarycentre de ses trois sommets.

Attention ! Le centre d'inertie d'un quadrilatère $ABCD$ est, en général, différent de l'isobarycentre des sommets A, B, C et D ! (Voir exemple ci-dessous)

<u>Principes de symétrie</u>

- Si la plaque admet un centre de symétrie, alors c'est son centre d'inertie.
- Si la plaque admet un axe de symétrie alors son centre d'inertie est sur cet axe.

<u>Principe de juxtaposition</u>

Si une plaque P_1 d'aire a_1 a pour centre d'inertie I_1 et une plaque P_2 d'aire a_2 a pour centre d'inertie I_2 alors la plaque $P_1 \cup P_2$ admet pour centre d'inertie le barycentre I de (I_1, a_1) et (I_2, a_2).

Remarque : comme les plaques sont homogènes, leurs aires a_1 et a_2 sont proportionnelles à leurs masses m_1 et m_2, on a donc aussi (d'après l'homogénéité des coefficients) : $I = \text{bar}\{(I_1, m_1) ; (I_2, m_2)\}$

<u>Exemple</u> :

$ABCD$ est un quadrilatère.

Construire l'isobarycentre G des sommets A, B, C et D. (On pourra utiliser le milieu U de la diagonale $[AC]$ et le milieu V de la diagonale $[BD]$)

On souhaite maintenant construire le centre d'inertie I de la plaque $ABCD$.

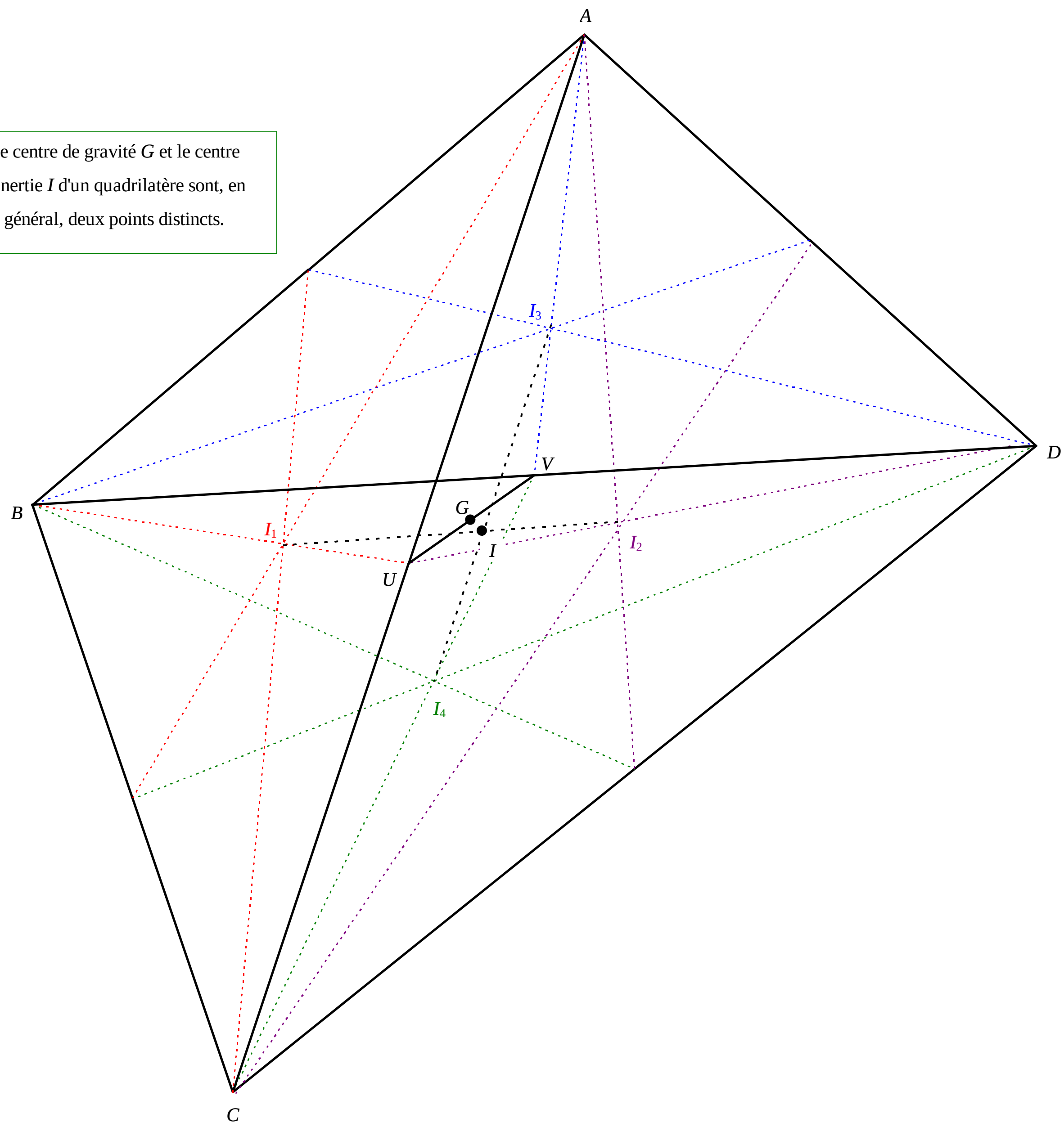
Construire le centre d'inertie I_1 du triangle ABC et le centre d'inertie I_2 du triangle ACD. En déduire que $I \in (I_1I_2)$.

Construire le centre d'inertie I_3 du triangle ABD et le centre d'inertie I_4 du triangle CBD. En déduire que $I \in (I_3I_4)$.

En déduire la position de I.

(Voir figure, page suivante)

Le centre de gravité G et le centre d'inertie I d'un quadrilatère sont, en général, deux points distincts.

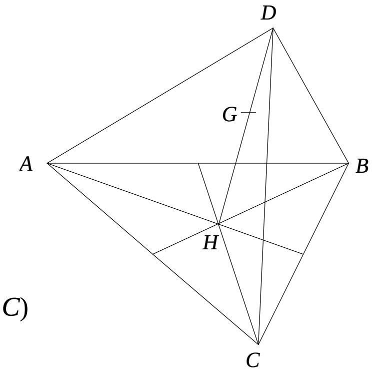


7. Associativité du barycentre

On ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (non nulle) des coefficients correspondants.

Exemple : $G = \text{bar}\{ (A , 1), (B, 2), (C, 3) \} = \text{bar}\{ (G', 3), (C, 3) \}$ où $G' = \text{bar}\{ (A, 1), (B, 2) \}$

Et finalement, on s'aperçoit que G est le milieu de $[G'C]$.



Application :

$ABCD$ est un tétraèdre et $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline\end{array}$. Situer G.

Introduisons le point $H = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$ (H est l'isobarycentre de A, B et C)

D'après l'associativité, on a $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline H & D \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}$

Donc on a : $3\overrightarrow{GH} + 4\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$; $7\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{0}$ d'où $\overrightarrow{DG} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{DH}$

Conclusion : G est situé sur la médiane issue de D aux 3 septièmes de celle-ci en partant de D.

Note : le résultat ci-dessus reste valable même si A, B, C et D sont quatre points quelconques du plan.

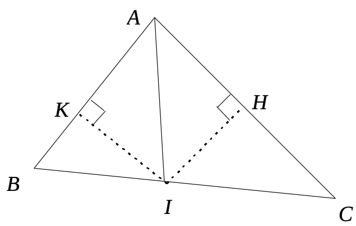
8. Applications

Caractérisation des pieds des bissectrices par des barycentres.

Soit ABC un triangle et I le pied de la bissectrice (intérieure) issue de A.

On note H et K les projetés orthogonaux de I sur $[AC]$ et $[BC]$ respectivement.

On rappelle que l'on a alors : $AK = AH$ et $IK = IH$



Comme I est sur le segment $[BC]$, il existe des réels β et γ, tous deux de même signe tels que :

$$\beta + \gamma \neq 0 \text{ et } \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont de sens opposés, on peut écrire :

$$\beta\, IB - \gamma IC = 0$$

$$\frac{IB}{IC} = \frac{\gamma}{\beta}$$

On peut donc choisir : $\beta = IC$ et $\gamma = IB$

C'est-à-dire : $I = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline B & C \\ \hline IC & IB \\ \hline\end{array}$

Or, les triangles ont une hauteur commune h (celle issue de A dans ABC).

Par homogénéité, on obtient, en multipliant les coefficients par $\dfrac{h}{2}$:

$$I = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline B & C \\ \hline \text{Aire}(AIC) & \text{Aire}(AIB) \\ \hline\end{array}$$

Mais par ailleurs : $\text{Aire}(AIC) = \dfrac{AC \times IH}{2}$ et $\text{Aire}(AIB) = \dfrac{AB \times IK}{2}$

Et comme $IH = IK$, la propriété d'homogénéité nous permet encore d'écrire :

$$I = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline B & C \\ \hline AC & AB \\ \hline\end{array}$$

Notons, pour finir $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, ainsi, on a montré que :

$$I = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline B & C \\ \hline b & c \\ \hline\end{array}$$